**Розв’язки, 5 клас**

**1.** *Відповідь:* рік не високосний.

*Розв’язання.* Число 2419200 ділиться на 7 (перевіряється безпосередньо). Отже, у лютому 28 днів, а рік – звичайний.

**2.** *Відповідь:* 8947+ 8947 = 17894.

*Розв’язання*. Зрозуміло, що З = 1 і А ≠ 0 (інакше А = Д = 0). Підставляючи А = 2, 3, ..., 9, знаходимо єдиний розв’язок 8947 +8947 = 17894.

**3.** *Відповідь:* парним.

*Розв’язання.*  Якби всі числа були непарними, то їх сума була б парною. Отже, серед цих чисел є парне число. Тоді добуток – парний.

**4.** *Відповідь:* 71371371.

*Розв’язання.* Нехай перша зірочка – х, тоді друга – 4-х, третя – 7, четверта – знову х, п'ята – 4-х, шоста – 7, сьома – х, і вона дорівнює 1. Значить, х = 1; 4 - х = 3.

**5.** *Відповідь:* 96 см.

*Розв’язання:* Якщо периметр квадрата *1* дорівнює 12 см, то його сторона – 3 см (12 см : 4). Тоді сторона квадрата *2* – 6 см (3 см + 3 см), а сторона квдрата *3*  – 9 см (6 см + 3 см). Сторона квадрата *4* – 15 см (9 см + 6 см). Тоді сторона квадрата *5*  – 24 см (15 см + 9 см). Периметр квадрата *5* дорівнює 96 см

(24 см ∙ 4).

**Розв’язки, 6 клас**

1. **Вiдповiдь**: так, можна. Розв’язання. 111 − 11 + 1 − 1 = 100
2. **Розв’язання**. Оскільки у дитячий садок ходить дівчинка, те це точно не Юра, якому не менш 8, тому що Таня старше Юри, їй 13 або 15, а так як сума років Тані та Світлани ділиться на 3, те це тільки 13, адже 15 у сумі з будь-яким іншим віком не ділиться на три. Отже, Тані - 13 років.Оскільки Таня старша від Юри, а йому не менш 8, то Юрі 8 років. Тепер, сума років Тані та Світлани ділиться на три, Тані 13, а Світлані 5 або 15, друге не підходить, а значить Світлані 5 років. Залишається Олена - їй 15 років.

Відповідь: Світлані 5 років, Юрі 8 років, Тані 13 років, Олені 15 років.

1. **Відповідь:** 1 спосіб: 8 відер по 21кг  та 1 відер по 17 кг.

2 спосіб: 2 відра по 16 кг та 9 відер по 17 кг.

3 спосіб: 1 відро по 16 кг, 5 відер по 17 кг та 4 відра по 21 кг.

4 спосіб: 5 відер по 16 кг та 5 відер по 21 кг.

спосіб: 6 відер по 16 кг,  4 відра по 17 кг та 1 відро по 21 кг.

1. **Рішення**. 1) Якщо СЕРЕД 24 жителів острова є правдолюб, тоді його сусіди брехун і правдолюб: БПП. У другого правдолюба сусіди також брехун і правдолюб: БППБ. Брехун повинен збрехати, і так як один з його сусідів правдолюб, то інший також повинен бути правдолюбцем: ПБППБП. Міркуючианалогічно, отримаємо, щоправдолюбцівв два рази більшебрехунів. Отримаємо 8 брехунів, 16 правдолюбців.

 2)Якщо СЕРЕД 24 жителів острова всібрехуни, то умовазадачітакожвиконується. Відповідь: 1) 8 брехунів, 16 правдолюбців; 2) 24 брехуна.

**5)Відповідь**. Так.

**Розв’язанн**я. Очевидно, післярозрізання одного аркушапаперу на 4 частинизагальнакількістьаркушівзбільшиться на 3.

Отже, якщотакуоперацію провести разів, то післяцього ми матимемо 4+3аркушів.

Якщовважати, щопідрахунокбуввиконаний правильно, то 4+3Звідси. Але 1958 не ділиться на 3.

Тому підрахунок був виконаний неправильно.

**Розв’язки, 7 клас**

1. Нехай у кошику всього х яєць. За умовою складемо вирази:

$$x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x; \frac{1}{4}x-\frac{1}{2}∙\frac{1}{4}x=\frac{1}{8}x; \frac{1}{4}x-\frac{1}{2}∙\frac{1}{4}x=\frac{1}{8}x;\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}∙\frac{1}{8}x=\frac{1}{16}x;$$

$\frac{1}{16}x=10;$ x = 160.

1. 385

 412

 770

 385

 1540­­­­­­­­­­­­­­­­­­\_\_\_

 158620

1. $7∙11∙13=1001$ «Тысяча и одна ночь »
2. Їх п’ятеро. Якщо в когось із Катрусиних друзів є сусіди тієї самої статі, то очевидно, що всі, хто стоять в колі, - однієї статі. Отже, хлопчики й дівчатка чергуються, а звідси випливає, що дівчаток стільки ж, скільки й хлопчиків.

**Розв’язки, 8 клас**

**1**.Відповідь: ні.

Розв’язання. Якщо в парі стоять два лицаріабо два брехуни, то вони один про одного скажуть «вінлицар». Якщо в парі стоять лицар і брехун, то вони обидваскажуть «вінбрехун». Таким чином, кожна фраза виголошенаОлімпіаднізадачі з математики з розв’язками для учнівсередньоїшколи парне число разів. Якбицих фраз булопорівну, то кожна фраза пролунала б по 2010: 2 = 1005 разів. А це число непарне.

**2**.Відповідь: 75$°$ ,15$°$,90$°$.

Розв’язання



Нехай в $∆ABC\left(∠C=90°\right)$ до гіпотенузи $AB=4x$ проведено висоту $CH$.Тоді її довжина, за умовою, становить $CH=x$.

Проведемо медіану $CM$. Так, як $CM$ виходить з вершини прямого кута, то $CM={AB}/{2}=2x$.

У трикутнику $CHM$ катет $CH$ в два рази менший за гіпотенузу. Тому $∠CMH=30°$.

Тоді в рівнобедреному трикутнику $BMC$, де $BM=MC$, $∠BMC=150°$. Отже, $∠B=15°$, а $∠A=75°$.

**3.** Нехай це число $\overbar{xy}$.

$$\left\{\begin{array}{c}x+y=16;\\y+10x=x+10y-18\end{array}\right.$$

х=7,у=9.

ВІДПОВІДЬ: 79.

**4.**

**5**.Нехай у класі хлопчиків х, а дівчат –у,тоді

2ху=4(3у+2х)

ху-6у-4х=0

(х-6)(у-4)=24.

Переглянувши усі дільники числа 24 і одержимо різні можливі відповіді, серед яких максимальне значення (х+у) буде для двох випадків 1і24 або 24і1.

х=7,у=28 або х=30, у=5.

х+у=7+28=30+5=35

Відповідь: 35 дітей.

**Розв’язки, 9 клас**

1**. Розв’язання.** 1 + 2 +3 + 4 + 5 +…+ n = 120. Це сума арифметичної прогресії $\frac{1+n}{2}n=120;$n + n2 = 240; n2 + n – 240 = 0; n1 = -16 – не задовольняє умову; n2 = 15. Отже, Оксані зараз 15 років.

Задачу можна розв’язати способом підбору – обчислити суму 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + … доки отримаємо 120.

2. **Відповідь:** 99

3.Нехай у трикутнику АВС АВ = АС, тоді $∠$ВАС = 120⁰. Позначимо: М – середину ВС, К – основа перпендикуляра, опущеного з точки М на сторону ВС. Так як $∠$АМК = $∠$АВМ = 30⁰, то АМ = $\frac{1}{2}$АВ, АК = $\frac{1}{2}$ АМ, тобто

АК = $\frac{1}{4}$ АВ. Отже, $\frac{ВК}{КА}=\frac{3}{1}$

****

4.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  Сім’я | тварини | всього |
| білки | кролики | хом’яки | їжаки |
| Іванови | 3 | 2 | 1 | 4 | 10 |
| Сидорови | 4 | 1 | 2 | 3 | 10 |
| Петрови | 2 | 4 | 3 | 1 | 10 |
| Кузніцови | 1 | 3 | 4 | 2 | 10 |

**5. Розв’язання.** Визначимо якою цифрою закінчуються степені чисел

 43 і 17. **431 = …3;** 432 = …9; 433 = …7; 434 = …1; **435 = …3**, …

 Бачимо, що цикл, через який повторюється остання цифра, становить 4. Отже, 43 : 4 = 10 (ост.3), тому 4343 = …7, тобто число закінчується цифрою 7.

Аналогічно знаходимо останню цифру числа 1717.

**171 = …7**; 172 = …9; 173 = …3; 174 = …1; **175 = …7;** …

Отже, 17: 4 = 4 (ост.1), тому 1717 = …7. Тоді різниця 4343 – 1717 закінчується нулем.

**Розв’язки, 10 клас**

1. Складемо та розв’яжемо систему рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{c}a+b-4=-1\\4a-2b-4=2\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}a=2\\b=1\end{array}\right.$$

1. Нехай у книгарні «Знання» х книжок, тоді підручників 0,2х. Оскільки серед підручників 60% видані українською мовою, то їх кількість становить 0,2х $∙ $0,6 = 0,12х. Отже, підручників, виданих українською мовою 12% від усіх книжок у книгарні «Знання»
2. Проведемо розрізи як показано на малюнку. Визначимо кому дісталось пирога не менше половини. Проведемо ще два розрізи, симетричні проведеним. Куски 1, 2, 6, 9 дістались Малюку, а симетричніїм 7, 8, 4 и 3 – Карлсону, якомувідійшла щеі

 середина 5. Тому Карлсону дісталось не менше половинипирога.



1. **Розв’язання.** Нехай остання цифра числа дорівнює 5. Тоді воно не може закінчуватися на 9, а отже, більше 20. Так як ціле число, більше 20, не може бути менше 21,то шукане число ділиться на 12. Але число, що ділиться на 12, парне, і тому не може закінчуватися на 5. Протиріччя. Це означає, що шукане число ділиться на 7. Єдине двозначне число, що ділиться на 7 і закінчується на 9 - це 49. Але число 49 не ділиться на 12 і більше 21. Протиріччя. Тому шукане число більше 20 і ділиться на 12.Єдине двозначне число, що ділиться на 7 і 12 - це 84.
2. **Розв’язання**. В рівнобедреному ∆ QPS $∠$PQS = $∠$PSQ=(180⁰- $∠$QPS) : 2= (180⁰-12⁰):2=84⁰. Тоді у рівнобедреному ∆PRS $∠$PRS = $∠$SPR= $∠$PSQ:2=84⁰:2=42⁰.

**Розв’язки, 11 клас**

1. Нехай сторони трикутника дорівнюють х, х+1, х+2. Тоді за теоремою косинусів маємо:

(х+2)2=х2+(х+1)2-2х(х+1)cos120°,

(х+2)2=х2+(х+1)2+х(х+1),

х2+4х+4=х2+х2+2х+1+х2+х,

2х2-х-3=0.

Це рівняння має один додатковий корінь х=1,5. Тому сторони трикутника дорівнюють 1,5 см, 2,5 см, 3,5 см, а периметр – 7,5 см.

1. Застосуємо метод математичної індукції. Якщо n=1, то твердження правильне.

Припустимо, що воно правильне, коли n=k та доведемо, що за цієї умови воно буде правильним і для n=k+1.

Sk+1=Sk+(k+1)2

$$S\_{k+1}=\frac{k\left(k+1\right)\left(2k+1\right)}{6}+\left(k+1\right)^{2}=\frac{k\left(k+1\right)\left(2k+1\right)+6\left(k+1\right)^{2}}{6}=\frac{\left(k+1\right)\left(2k^{2}+7k+6\right)}{6}=\frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(2k+3\right)}{6}$$

1. $sin^{4}\frac{π}{16}+sin^{4}\frac{3π}{16}+sin^{4}\frac{5π}{16}+sin^{4}\frac{7π}{16}=sin^{4}\frac{π}{16}+sin^{4}\frac{3π}{16}+cos^{4}\frac{3π}{16}+cos^{4}\frac{π}{16}=\left(sin^{2}\frac{π}{16}+cos^{2}\frac{π}{16}\right)^{2}-2sin^{2}\frac{3π}{16}cos^{2}\frac{3π}{16}=2-\frac{1}{2}sin^{2}\frac{3π}{8}-\frac{1}{2}sin^{2}\frac{π}{8}=2-\frac{1}{2}\left(cos^{2}\frac{π}{8}+sin^{2}\frac{π}{8}\right)=1.5$
2. Нехай дано кут О та точку М, що лежить усередині кута. Нехай А та В – деякі точки на сторонах цього кута. Побудуємо точку М1 та М2, симетричні точці М відносно сторін кута О. нехай пряма М1М2 перетинає сторони кута у точках А1 та В1.



Трикутник АММ1 рівнобедрений (АМ=АМ1), оскільки висота, проведена до сторони ММ1, є медіаною. Аналогічно, ВМ=ВМ2. Таким чином, РАВМ=АМ+ВМ+АВ=АМ1+ВМ2+АВ, тобто периметр трикутника АВМ дорівнює довжині ламаної М1АВМ2. Ця ламана матиме найменшу довжину, якщо точки А та В збігатимуться з точками А1та В1 відповідно. Отже, А1 та В1 – шукані точки.

1. Нехай N- шукане число. Тоді матимемо: N=5m+3=41n+2. Виразимо m із цієї рівності, матимемо:

$m=\frac{41n-1}{5}=8n+\frac{n-1}{5}$. Число $\frac{n-1}{5}$ повинно бути цілим. Нехай воно дорівнює k, тоді n=5k+1, iN=41n+2=41(5k+1)+2=205k+43.

Це число при діленні на 205 дає остачі 43.